17-18世紀の代数学の基本定理について (数学史の研究)

AUTHOR(S):
但馬, 亨

数理解析研究所講究録 1444 巻 2005 年 124-136

17-18 世紀の代数学の基本定理について

東京大学大学院・総合文化研究科　但馬　亨 (TAJIMA, Toru)
Graduate School of Arts and Sciences
The University of Tokyo

問題提起：ガウスの言明と数学史上の通説

代数学の基本定理とはそもそも，複素係数をもつ任意の代数方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

は複素数の範囲内に重解を含めて n 個の解を持つことの存在証明である．現代においてこの定理に関してはおよそ 10 個の証明が知られているが，この証明群の先陣を切ったのは，18 世紀の数学者であるオイラーやダランベールや，ラグランジュではない他ならぬ**ガウス**その人である・・・と従来の数学史上ではあたかも通説として語られるのが一般的である．以下ボイヤーの記述を引用する．

> "D'Alembert had spent much of his time and effort attempting to prove the theorem conjectured by Girard and known today as the fundamental theorem of algebra - that every polynominal equation $f(x) = 0$, having complex coefficients and of degree $n > 1$, has at least one complex root[...]. The statement, which Gauss later referred to as *the fundamental theorem of algebra* is essentially the proposition known in France as d'Alembert's theorem; but Gauss showed that all previously attempted demonstrations, including some by Euler and Lagrange, were inadequate."*1

このような記述は他の数学史家 Struik においても同様に言えることだが，実は彼ら数学史家・数学者の根拠はガウス自身による以下の記述にある．ガウスは 1799 年の第 1 証明「すべての 1 変数をもつ整有理代数関数が 1 次もしくは 2 次の次数の実因子に分解可能である定理の新証明：以下 (第 1 証明)」(Demonstratio nova theoremis omnen functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse) を回想して以下のように述べている．

> 1799 年に著わした論文，「第一証明」は 2 つの目的をもっていた．1 つは，代数方程式の理論について最重要であるこの定理に関して，これまで試行されてきたすべての証明は**不十分でまやかし**であったことを示すことである．つづいて，完全に厳密な新証明を与えることである．*2

ガウスはこのように彼自身に先立つ数学者の証明の試みについて実に批判的で，かつ彼自身の証明に絶大な自信を示している．第 1 証明の本質的部分は以下のようにまとめられる．

ガウス第 1 証明 (1799) のエッセンス*3

---

*1 [Boyer 1968] pp. 490-491,

*2 [Gauss *Werke*] vol. 3, p. 73. "Die im Jahre 1799 erschienene Denkschrift, *Demonstratio* [...], hatte einen doppelten Zweck, nämlich erstens, zu zeigen, dass sämtliche bis dahin versuchte Beweise dieses wichtigsten Lehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen *ungenügend* und *illusorisch* sind, und zweitens, einen neuen vollkommen strengen Beweis zu geben."

*3 [Gauss 1799], [Gauss *Werke*], vol. 3, pp. 1-30.

ガウスは「第1証明」でまず係数を複素数範囲まで拡張した以下の方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ を想定する．この方程式を

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

という複素平面上の関数とする．つづいて，ここから変数 x が適当な円（とりわけ単位円）上を動く際に $f(x)$ の描く曲線が原点をとおらなければならないことの証明を行う．この複素関数 $f(x)$ を複素数 C から C への写像とみなす．たとえば，$f(0)=a_n$ であるから，0 は a_n に写像される．ここで，$f(x)-a_n$ がどの程度原点から離れているかについて考えると，

$$f(x)-a_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x$$

$$=x^n\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right)$$

であるから両辺の絶対値をとって，不等式 $|a|+|b|\geq|a+b|$，$|a+b|\geq|a|-|b|$ より，

$$|f(x)-a_n|=|x|^n\left|1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right|$$

$$\geq|x|^n\left\{1-\frac{a_1}{|x|}-\frac{|a_2|}{|x|^2}-\cdots-\frac{|a_{n-1}|}{|x|^{n-1}}\right\}$$

ここで $|x|$ を十分大きくとれば，$\frac{|a_1|}{|x|},\frac{|a_2|}{|x|^2},\cdots\frac{|a_{n-1}|}{|x|^{n-1}}$ などは，限りなく 0 に近づけることができるから，

$$1-\frac{a_1}{|x|}-\frac{|a_2|}{|x|^2}-\cdots-\frac{|a_{n-1}|}{|x|^{n-1}}\geq\frac{1}{2}$$

となる．ゆえに $|x|$ が十分に大きいとき

$$|f(x)-a_n|\geq\frac{|x|^n}{2}>|a_n|$$

が成立する．(下図参照)

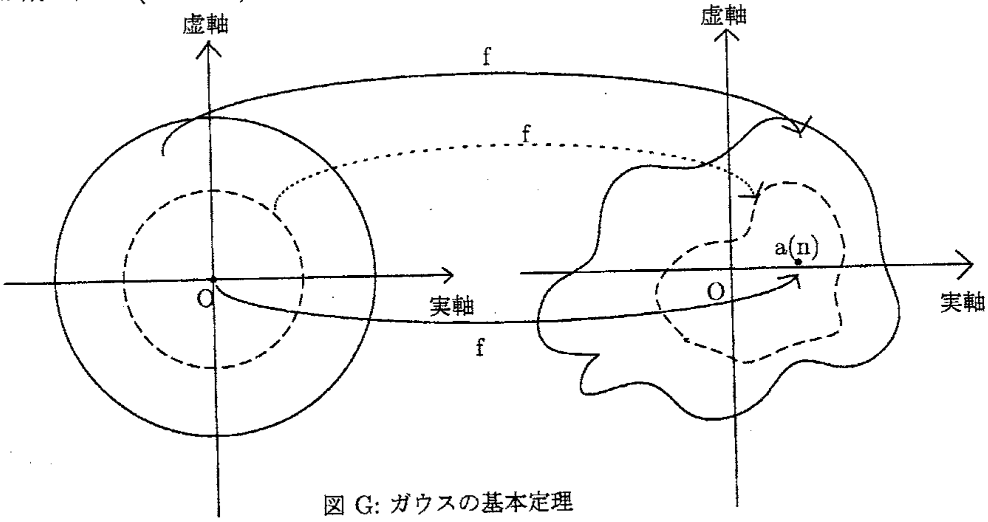

図 G: ガウスの基本定理

ここまでは，この証明を理解するのはきわめて容易である．しかし，この後問題が発生する．この計算結果までは複素有理数でも成立するので，有理数係数の代数方程式は複素有理数根をもってしまうことになってしまう．この後でガウスは必然的に実数体の連続性を使うことになる．このように，厳密性の宣言を高らかにおこなったガウスの第1証明でも実数体，多項式関数の連続性や「閉曲線」や「その内部」などの幾何学的イメージに多くを依拠するものであり，この依存性が問題として残る．加えて前図で示される第1証明では，関数 $f(x)$ が描き得る曲線は原点を一周だけする場合をのみを示しているけれども，より一般的に考察するならば，何周もする場合も想定しなければならない．*4それゆえに，もっと代数的な証明も存在する．しかし，そのいずれの場合も多項式関数の連続性は前提としなければならない．議論をより拡大し，他の基本定理に関した証明を検討してみても，位相数学的手法，解析性，そして先ほどの多項式関数の連続性などを完全に省いた「純粋に」代数的な手法の証明はやはり見つけることができないのである．そもそも複素数の集合 $\mathbf{C}$ 自体を代数的に構成できないことからもこのことは明らかであろう．

繰り返すが，ガウスは第1証明において彼の前時代の数学者の証明の試みのすべてを「不十分でまやかし」だときわめて単純かつ統一的に切り捨てているが，果たしてこの見識は正しいのだろうか．この問題に答えるためには，まず代数学の基本定理自体がどのようにして自立した問題として浮上してきたかについて調べる必要がある．注目すべき発端はライプニッツによって取り上げられた1つの問題にある．

ライプニッツによる種子：有理関数の積分問題から

1702年5月『学術紀要』(*Acta eruditorum*) 誌発表の論文 **「和と求積に関する無限の学問による新解析例」(Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas)** には注目すべき記述がある．以下に引用してみよう．

> 私は円の求積を有理求積へと還元することによって，すなわち円の求積から $\int dx : (1+xx)$ を考えることで，まさに私の算術的求積を見出した．その際，同時に有理式の求和へと還元される，あらゆる求積がそれ自身最も簡単な求和の特定の項へと帰着されることに気付いたのである．その理論を用いてなすべきことを，乗法による積を加法によって集められた (conflatus) 全体へと変換する新種の解法によって，すなわちそれらの根の連続的乗法によって任意の高次の [次数の] 分母をもっている分数を，ただ単純な分母を持つ分母からなる集まりへと変換することで示そう．*5

つぎに，これに続く実際の問題を以下で示す．まず，$b, c, \cdots$ を定数として，$x+b=l, x+c=m, x+d=n$ とするとき，以下の有理式は公分母 l, m, n から形成される多項式の和の形式へ分割される．

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\beta}{\pi}x+\frac{\gamma}{\pi}xx+\frac{\delta}{\pi}x^3}{x^3+\frac{\zeta}{\pi}x++\frac{\mu}{\pi}xx+\frac{\lambda}{\pi}}=\frac{\frac{\alpha}{\pi}}{lmn}+\frac{\frac{\beta x}{\pi}}{lmn}+\frac{\frac{\gamma xx}{\pi}}{lmn}+\frac{\frac{\delta x^3}{\pi}}{lmn}.$$

このとき，右辺の第1項を除く，変数 x を伴う各項は第1項の形式に前述の関係式 $(x+b=l)$ から還元される．第2項の一部分 $\dfrac{x}{lmn}$ は，

$$\frac{x^2}{lmn}=\frac{1}{n}-\frac{b}{lmn.}$$

*4 実際には [Gauss 1799] pp. 25-26 において，問題の円周を $2n$ 個の円弧に分割して構成し，さらに $\theta=4\pi/n$ とおいたときに，この円上で $\theta, 3\theta, \ldots, (8n-3)\theta, (8n-1)\theta$ を偏角とする $4n$ 個の点 $P_0, P_1, \ldots, P_{4n-1}$ を考察しているが，閉曲線の回転数等については触れていない．

*5 [LMG] vol. 5, p. 351; ライプニッツ著作集第3巻 p. 208.

同様に第3項以下の x の冪部分のみを分子に含む箇所も分解される.

$$\frac{x^2}{lmn}=\frac{1}{n}-\frac{b+c}{mn}+\frac{b^2}{lmn}.$$

$$\frac{x^3}{lmn}=1-\frac{b+c+d}{n}+\frac{b^2+c^2+bc}{mn}-\frac{b^3}{lmn}.$$

続けて,「分子に不定量である不定の整式を含んでいる分数を,整式と分子が定量の分数へと分解する」ことで,一般の有理式が多項式と分母が1次式で分子が定量の分数の和として表現できる,とする.*6 しかし,この後に続く例でライプニッツは継続的にこの問題が扱われるようになる1つの契機となる,重要な誤謬を残す.

ライプニッツの因子分解についての誤謬

ライプニッツは同論文の続く箇所で,

$$\int\frac{dx}{x^4+a^4}$$

について,これが

$$\frac{1}{x^4+a^4}=\frac{1}{(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})}$$

と分解されることを述べる.しかし,結局「この4つの根からどのような組み合わせを作ったとしても,・・・(略)・・・(2項の積)が実量を与え,しかも実で平方的な因数になるようにすることはできない」と結論する.*7 しかし,実際には $(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})=x^2+\sqrt{2}ax+a^2$ という組み合わせを考察することが容易にできる.このため,ライプニッツのこの誤謬は大陸側,イギリス側双方の17世紀末-18世紀初頭の数学者による議論の的になった.イギリス側ではロジャー・コーツ,大陸側ではヨーハン・ベルヌーイらの研究が代表的である.しかし,いずれの研究もオイラーやダランベールが活躍する1740年代まで,コーツの夭逝などの理由により,一般的な n 次の多項式の考察まで進展しない.1740年代のオイラー,ダランベールの集中的な考察までこの沈滞の状況は20年ほど続く.

オイラーにおける代数学の基本定理問題への契機

オイラーは論文「高次の微分方程式の積分について」(De integratione aequationum differentialium altiorum gradum) (1743)

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}\cdots+N\frac{d^ny}{dx^n}=0 \tag{1}$$

として表される微分方程式の解法は代数方程式(p を定数のとき,微分方程式の解が $y=e^{px}$ で表されるとする.)

$$A+Bp+Cp^2\cdots+Np^n=0 \tag{2}$$

*6 *ibid.*, pp. 351-353f : 同邦訳 pp. 209-211f.
*7 [LMG] vol. 5, p.359 : [ライプニッツ 1999] p. 219.

の解法に帰着できることを示す．すなわち $y = e^{px}$ を式に代入すると，まず

$$Ae^{px} + B\frac{de^{px}}{dx} + C\frac{d^2e^{px}}{dx^2}\cdots + N\frac{d^ne^{px}}{dx^n} = 0$$

となる．したがって，指数部分の微分を n 階の項まで連続して実行すると与式は結局，$p = e^{px}$ とおいたときに $A + Bp + Cp^2 \cdots + Np^n = 0$．となる．代数学の基本定理の問題設定に関してはオイラーにおいても無限小解析学（微積分学）の枠内からの要請であることをここで確認しておきたい．

『無限解析入門』での代数学の基本定理の記述（1）

1748 年出版のオイラーによる 18 世紀中葉の最重要数学著作の一つである『無限解析入門』(*Introductio in analysin infinitorum*) においても，代数学の基本定理についての記述を見出すことができる．まず，多項式の因子分解を主体として扱う第 1 巻第 2 章「関数の変換について」(De transformatione functionum) において，クロネッカーの定理を前提する旨が明示されている．以下，問題の『無限解析入門』第 1 巻第 2 章 28 節からの記述を引用する．

> 28 節：ところで，2 次因子は 2 つの単純因子を包摂すること，3 次因子は三つの単純因子を包摂すること，以下も同様であることは明白である．それゆえ，ある z の整関数において，z の最高の冪指数が n に等しいとき，その整関数には n 個の単純因子が包摂されていることになる．これより同時に，諸因子のうちのあるものが 2 次因子であったり，またあるものは 3 次因子などであったりする場合にも，因子の個数を調べることが可能になる．*8

このようにオイラーによれば多項式の線型分割性はあくまで自明なものとして扱われる．この点はその後に続く基本定理についての楽観的な証明観を表わしており，議論の重要な導入になっている．近傍の箇所にはさらにオイラーが好んで行う具体的な事例の網羅的計算結果を列挙するスタイルが繰り返されている．扱われるのは 4 次多項式の例である．

> 31 節：Q は 4 個の単純虚因子 (factores simplices imaginaris) の実の積とすると，この積 Q は 2 個の二重実因子 (factores duplices reales) に分解される．
>
> なんとなれば，Q は $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ という形状をもつとしよう．もしこれを 2 個の二重実因子に分解するのが不可能であるなら，これは，$z^2 - 2(p + q\sqrt{-1})z + r + s\sqrt{-1}$ か，もしくは $z^2 - 2(p - q\sqrt{-1})z + r - s\sqrt{-1}$ という 2 個の二重虚因子 (factores duplices imaginaries) に分解されなければならないことになる．なぜなら，これらの他には，積が実 [因子] になる，つまり $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ と等値になるような性質を備えた虚 [因子] の形状は考えられないからである．ところで，これらから，下記のような四個の単純因子が生じる．*9
>
> $$\begin{aligned}
(I).&\quad z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1}},\\
(II).&\quad z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1}},\\
(III).&\quad z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1}},\\
(IV).&\quad z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1}}
\end{aligned}$$

---

*8 [Euler *Opera*] (1) vol. 7, p. 34 ; [オイラー 2001] p. 18.

*9 *ibid.* pp. 35-36 : 邦訳, pp. 19-20.

というように虚数係数を含む z に冠する2次式はオイラーによって，「二重虚因子」という表現され，さらにそこから「単純虚因子」を導く作業が続く．(I),(III) の組み合わせの積を未知数の置換 $(t = p^2 - q^2 - r, u = 2pq - s)$ を施し最後まで計算すると，

$$zz - (2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}})z + pp$$

$$+qq - p\sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}} - q\sqrt{-2t + 2\sqrt{tt + uu}}\sqrt{tt + uu}$$

として表される2次実因子が生成させる．これは (II),(IV) の組み合わせについても可能である．オイラーの最終的な結論は「こうして，提示された積 Q は2個の2重実因子への分解の可能性を否定されたが，それにも関わらず実際に2個の2重実因子に分解されたことになる.」となる[*10]

自明だがここでオイラーが用いた証明法は背理法である．はじめに題意の4次多項式の実因子への分解不可能性を論じ，そこから虚数係数を含まない2次式へと煩雑な置換と計算を繰り返して実証するのである．さらに続く，32節ではこの結果をより一般的に拡張して，以下のような記述がなされる．

> 32節：この証明の様式をいっそう高い次数の冪に及ぼすことはできないが，任意個数の虚因子に対してもこの性質は成立すること，したがって $2n$ 個の単純虚因子を n 個の2重実因子に置き換えることはつねに可能である．これは疑いをさしはさむ余地なく明白である．こうして z の整関数はすべて，いくつかの単純因子もしくは2重実因子に分解されることになる．この事実は完全な厳密さをもって証明されたというわけではないが，その正しさはこれからますます強まっていくであろう．後に，
>
> $$\begin{array}{l} a + bz^n \\ a + bz^n + cz^{2n} \\ a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}, \cdots \end{array}$$
>
> のような関数が，実際に上記のようにしていくつかの実2重因子に分解される様子を目の当たりにすることになるであろう.[*11]

この記述は5次以上の代数方程式の解法可能性がオイラーの時代においては依然として多くの数学者の相当な執念をもって議論されていたので（もちろん成功には至らなかったが)，オイラーも同様に解の公式が存在する4次の事例の成功を筆頭にして，より大きな一般化を望んでいたことを示している．「任意個数の虚因子」に対してもこの分解は可能であることは彼にとっては証明不能なことであったが，$2n$ 個の虚数係数多項式は n 個の実係数2項式に変換可能できる，という事実を元に任意次数と任意係数をもつ方程式へ一般化できる可能性は予想的に議論することができた．ただ1740年代においてオイラーは一般的な証明の完成は成し遂げられていないこと，証明方法が脆弱であることについて認識していたことが以上の「予想」的表現から容易に伺われる．

『無限解析入門』での代数学の基本定理の記述（2）

続く第1巻第9章での記述での要点は，ド・モアブルの定理の利用と自明でない定式化の問題である．この章は「3項因子の研究」(De investigatione factorum trinominalium) と題されている．ここで，オイラーは，

---

*10 *ibid.* p.36：邦訳, p. 20.

*11 *ibid.* p. 37：邦訳, pp. 20-21.

『無限解析入門』のあらゆる箇所で多用するド・モアブルの定理に基づいた議論を展開する．オイラーの扱うド・モアブルの定理は，n をすべての自然数としたときに，

$$(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi)^n = \cos n\phi \pm \sqrt{-1}\sin n\phi$$

という形で表される．前節では，この定理を利用して以下の二形式 $a^n \pm z^n$，$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$ で表される多項式の因子分解を導いているが，*12ここで得られた結果を即一般化している．この一般化の議論は論理的にはきわめて危うい主張になっている．以下引用する．

> 154 節：このような歩みをさらに延長して，
>
> $$\alpha + \beta z^n + \gamma^{2n} + \delta^{3n}$$
>
> という関数に及ぶことも可能であろう．この関数は $n + \theta z^n$ という形のひとつの実因子をもつ．その実単純因子と実二重因子とを明示するのは可能である．もうひとつの $\iota + \chi z^n + \lambda z^{2n}$ という形の乗法子 (multiplicator) は，因子分解が可能な場合にはいつでも，前節でみた事項に基づいて，これと同様の仕方で因子分解される (in factores resolvi) ことが可能である．*13

と述べ，（1）次に奇数次の多項式は最低一つの実根をもつこと，（2）先の第２章で扱った４次多項式が二重実因子へ分解されること，この二点から，単純もしくは二重の実因子への分解が，以下の形式で表される三種の多項式に関してつねに成立する，と結論する．

$$\begin{aligned}(I).\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n},\\ (II).\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \epsilon z^{4n},\\ (III).\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \epsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}.\end{aligned}$$

この非常に大胆な一般化は，先の（1）（2）の条件からは大幅に飛躍している．続く結論部分には，このようにさらに一歩踏み込んだ主張がなされる．すなわち，「**あらゆる整関数をこのように分解することに関して，なお一抹の疑念が残されていたかもしれないが，いまやほぼ完全に払拭されている．**」というように．*14ここで，表されているオイラーの意図は何であろうか．フランスの数学史家 Gilain が示すこの問題についての解答は「このオイラーの表現は明らかに，代数学の基本定理の正当性についての確信と，この確信を読者に分有させるための彼の意思を示す．」というものであるが，これは言いえて妙である．*15すなわち『無限解析入門』執筆時の代数学の基本定理の証明は，オイラー本人にとっても不十分であると認識されるものであった．この点は第２章で論じた内容に準じているといってよかろう．

「方程式の虚根についての研究」における記述

代数学の基本定理に冠するオイラー最大の論文「方程式の虚根についての研究 (*Recherches sur les racines imaginaires des équations*)」(1749) は，フランス語で 1751 年に「ベルリン科学アカデミー紀要」誌上に発

---

*12 153 節の最後部で扱われるのは，$a^{10} - 2a^5z^5\cos g + z^{10} = (a^2 - 2az\cos\frac{g}{5} + z^2)(a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{5} + z^2)(a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{5} + z^2)(a^2 - 2az\cos\frac{4\pi - g}{5} + z^2)(a^2 - 2az\cos\frac{4\pi + g}{5} + z^2)$ への分解である．[Euler *Opera*] (1), vol.8, pp.163-164：邦訳，pp.134-136. の該当箇所を参照．

*13 *ibid.* p. 164; 邦訳 p. 136.

*14 *ibid.* pp. 164-165 ：邦訳 pp.136-137.：“Quare si ullum dubium mansisset circa huiusmodi resolutionem omnium functionum integrarum, hoc nunc fere penitus tolletur.”

*15 [Gilain 1991] p. 110.

表された．この論文の前半部分では，先立つ 1740 年代後半におけるペテルスブルク科学アカデミーの同僚研究者であったゴルトバッハや，ダニエル・ベルヌーイらと書簡を通じて議論された内容の発展・継続研究がなされている．この先立つ書簡集に関しては，現時点ではいまだオイラー全集にまとまった形としては残されておらず，[Euler Fuss] や [Euler *Opera Post.*] といった 19 世紀末にペテルスブルクで出版された特殊な書簡集を参照して理解するしか研究の方法はない．こういった資料的に困難な状況が存在するので，本稿では忠実に現時点で利用できる「虚根についての研究」を注視し，その構成と論文内の着目すべきアイディアを紹介するにとどめたい．

構成については，大きく分けて二部分に整理することができる．第 1 部分は全集版第 1 系列第 6 巻の 78-113 頁部分にあたり，欠項を含む多項式の実因子への分解の方法の多くの例示が行われている．

これに続く第 2 部分（同巻 114-121 頁）では，『無限解析入門』第 2 章部に存在した曖昧な記述を排除しようとする態度が確認される．すべての代数方程式の根は，$M+N\sqrt{-1}$（ただし M,N は実数）の形式で表示されることを証明するために，試行が数多く行われいている．この全ての根を $M+N\sqrt{-1}$ で表現する方法は，後のダランベールの証明で使用されたものと共通している．また，これ以降オイラーの複素形式による記述は，基本的な代数的演算（四則演算と根の開平等）を受けても形式が保持される点が議論される，この点は後述のダランベールのアイディアと類似する．つづいて，この結果と以下の他の 2 結果，

1. 方程式の係数に対応する一般的表現は，根の開平や四則演算以外の代数的演算を含まないこと*16
2. 超越数（代数的数以外の数）の操作は（代数的演算に）介入する，という点のみでしか保証されないこと*17

から，代数方程式のすべての虚根はこの複素数形式で表示されることができると結論する．しかし，この「2」の結果は誤りで，この論文の証明そのものをやはり無効とする大きな矛盾を与えるものである．

以上のような証明上の困難性を含んではいるものの，この論文にはオイラーの初歩的なガロア理論についての認識（置換群の発想）についての片鱗が伺われる箇所が存在する．この点は直接代数学の基本定理の証明として機能したものではないが，それ以前の数学者が 5 次以上の代数方程式の可解性の問題について徒なる試行錯誤を繰り返してきた事実に対して，オイラーは彼なりの回答を，可解性を論じることが目的ではない論文の中ではあるが，提示したことを意味し，興味深い．[Euler 1751] 97 頁から 99 頁にあるアイディアの論点を現代的に整理してみよう．

扱う例は 4 次の多項式である．まず実係数をもつ 4 次の多項式が，同様に実係数をもつ 2 次因子の積に分解できるとする．以下の x^3 の項を削除した形式，すなわち縮約化された 4 次方程式を仮定する．

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0 \tag{3}$$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を方程式 (3) の根とする．x^3 の係数は 0 なので，

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0. \tag{4}$$

さらに方程式 (3) の第 1 要素 (le premier membre) は以下の因数の積によって表示されるとする．

$$(x^2-ux+\mu)(x^2+ux+\lambda) \tag{5}$$

*16 [Euler 1751] p. 121 : "toutes les racines imaginaires (...) ne contiennent point d'autres opérations que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires..."

*17 *ibid.* p. 120 : "(...) et l'on ne saurait soutenir que des opérations transcendantes s'y mêlassent."

ここで，係数 u は方程式 (3) の２根の和になる．したがって u は ${}_4C_2 = 6$ 個の異なる値をとり得る．オイラーはここから，u は実係数をもつ６次方程式 $F_6(x) = 0$ を満たすと結論する．

$$F_6(u) = 0 \tag{6}$$

続いて，方程式 (6) が少なくとも１つの実根を持つことを証明しようと試みる．このためには，まずこの式の最終項が負にならなければならないことを示す必要がある．すなわち，以下のように u の諸根について関係式を作る．

$$u_1 = \alpha + \beta, \quad u_2 = \alpha + \gamma, \quad u_3 = \alpha + \delta,$$

$$u_4 = \gamma + \delta, \quad u_5 = \beta + \delta, \quad u_6 = \beta + \gamma.$$

したがって，以下の関係式が成立する．

$$u_4 = -u_1 \quad u_5 = -u_2 \quad u_6 = -u_1$$

すなわち式 (6) は以下の形式に変形される．

$$F_6(u) = (u^2 - u_1^2)(u^2 - u_2^2)(u^2 - u_3^2) = 0$$

この式の展開後の最終項にのみ注目すると $-u_1^2u_2^2u_3^2$ となる．この項が負数になることを証明するためには，積 $u_1^2u_2^2u_3^2$ が実数になることを示せば十分である．

この積が記号 $\alpha\beta\gamma\delta$ の対称式でなく，方程式 (3) の根の可能な置換のすべてを施したときに，方程式 (3) の根の間で関係式 (4) が成立するという条件を満たしていれば，この積は少なくとも不変になる．実際，この場合，積 $u_1u_2u_3$ は以下の形式で表示することができる．

$$u_1u_2u_3$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)+(\alpha+\delta)(\beta+\delta)(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)(\beta+\delta)(\alpha+\delta)+(\gamma+\delta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}{4}$$

結果としては，この論分は『無限解析入門』を凌ぎ，オイラーによる代数学の基本定理についての最も精力的な取り組みとなったが，しかしながら，同著作と同様に，この長大な論文のいずれの部分にも線型分割の定理についての証明は存在しない．オイラーは後にクロネッカーが証明するこの定理を前提とすることを生涯一貫した姿勢として，代数学の基本定理の証明を行おうとした．オイラーにおける厳密性の欠如の問題は，ときとして無限小解析学の範疇で厳しい批判を 19 世紀に受けることになるが，ガウスが指摘・断罪したのは細部の論理的な問題というよりも，このオイラー的問題設定そのものにあったと思われる．これに引き替え，ダランベールによる同時期の証明の試みはまた同様に，論理的な欠陥があるにせよ，複素解析的手法を初めて導入した点と線型分割の定理を前提としなかったことの計２点で，オイラーのそれとは別種のものであり，さらにガウスの証明と類似している．ガウスはオイラーと同様な語気や口調でダランベールの証明を決して批判できず，さらには前時代の不完全な証明群の一つとして断罪できないのである．冒頭で示したように，ガウスの第１証明においてもなお，解析的直観とそれがもつ問題性が依然として横たわっており，「純」代数学的な証明とは言い難い状況があった．ダランベールの証明をつぎに見ることによって，18 世紀の証明の試みが一つの単純な大枠でのみ捉えられるものではないことを最後に示したい．

ダランベール草稿断片 [1745]：複素解析的手法によるさきがけ

ダランベールの証明は，その形式の点でオイラーのそれとは大きく異なるものである．その本質は，複素形式が四則演算や開平・べき乗されても保持されることにある．べき乗の場合について例示してみよう．[*18]

項目 3：扱われる内容：複素形式がべき乗されても保持されること

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x+y\sqrt{-1}$$

この両辺の対数をとりさらに微分を施せば以下の式

$$(m+n\sqrt{-1})\frac{da+db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}$$

が得られ，両辺の分母を有理化するため，左辺，右辺にそれぞれ $a-b\sqrt{-1}$，$x-y\sqrt{-1}$ を乗じると，

$$(m+n\sqrt{-1})\frac{adb+bdb\sqrt{-1}+ada+bdb}{aa+bb}$$

$$= \frac{xdx+ydy+(xdy-ydx)\sqrt{-1}}{xx+yy}.$$

したがって両辺を実部，虚部に分け微分量をとると，与式の実部は

$$\log\sqrt{xx-yy} = m\log\sqrt{aa+bb} - n\int\frac{adb-bda}{aa+bb},$$

そして虚部は

$$\int\frac{xdy-ydx}{xx+yy} = m\int\frac{adb-bda}{aa+bb} + n\log\sqrt{aa+bb}.$$

となる．この結果 y と x が規定される．すなわち y，x それぞれ半径が以下になる角の正弦，余弦になる．半径を r とすると

$$r = c^{m\log\sqrt{aa+bb}-n\int\frac{adb-bda}{aa+bb}} = (\sqrt{aa+bb})^m \times c^{-n\int\frac{adb-bda}{aa+bb}}$$

であり，角度の実際の値は $m\displaystyle\int\frac{adb-bda}{aa+bb} + n\log\sqrt{aa+bb}$ となる．[*19]

このようにして引き続き項目 4，5，6 まで冪の演算が複素量の形式を崩さないことが「解析的値」(valeur analytique) が実数である x,y に割り当てられることで示される．[*20]さらに，項目 7 では無限小量の係数をもつ複素量と有限量の係数をもつ複素量の積の演算，その後の複素形式の安定性が示される．

こうした諸演算の後に複素形式の安定性が示された最後の系 7 においては，$x+y\sqrt{-1}$ 形式の量 (grandeur) を含んだ任意関数 (fonction quelconque) はつねに $p+q\sqrt{-1}$ で表示され得ることが明示される．ここから方

---

*18 ダランベールの数学・自然科学に関する全集はリヨン大学数学科のグループを中心に現在編纂の過程にある．ここで用いたテキストは Christian Gilain が [Gilain 1991] pp. 133-136. において草稿からはじめてトランスクリプションしたものであり，全集には未収録のものである．

*19 この $\displaystyle\int\frac{adb-bda}{aa+bb}$ の導出には，この量がとくに式 $d(\frac{b}{a})/(1+\frac{bb}{aa})$ の積分量であることを利用する．

*20 [Gilain 1991] pp. 134-135.

程式の虚根はつねに $p+q\sqrt{-1}$ という形式で表示され得ることが導出され，必然的に共役複素数 $p-q\sqrt{-1}$ も同時に根の１つに含まれ（項目９），つねに方程式中の虚根が偶数個存在するが結論として示される（項目１０）．以上がダランベールが行った複素形式並びに同形式で与えられる多項式の性質についての本質的議論であった．

結論

これまで 17 世紀末から 18 世紀中葉に至るまでの代数学の基本定理について，ライプニッツの誤謬の問題からはじめて，18 世紀的な数学者の典型であるオイラーとダランベールの諸証明の試みを中心に見てきた．二人の数学者とも多大な労力を費やして，この問題の考察していたことが，これまでの膨大な草稿・公刊原稿から示されている．19 世紀前半の代表的数学者であるガウスが簡単に切り捨てたようには，実際の 18 世紀数学の事象は単純ではなかったといえるのではないだろうか．数々の天才が活躍した科学革命期の 17 世紀と現代数学の枠組みがほぼできあがる厳密性重視の 19 世紀の端境期として単に捉えられないほど 18 世紀は豊饒すぎる数学的事象を含んでいるのである．

参考文献

[*BM*] *Bibliotheca mathematica : Zeitschrift für Geschichte der Mathematik.* Dritte Folge, Leibzig, 1900-1914.

[LMG] *Leibnizens Mathematische Schriften*, hrsg. von C. I. Gerhardt. Halle, 1849-63; (Hildesheim-New York, 1971)(rep.).

[LSB] Leibniz, G.W. *Sämtliche Schriften und Briefe* hrsg. von Preussishe Akademie der Wissenschaften zu Berlin und von der Deutschen Akademie der Wissenschaften der DDR. Darmstadt, Berlin 1923-.

[*MARS*] *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris.*

[*StL*] *Studia Leibnitiana : Zeitschrift für Geschichte der Philosophie und der Wissenschaften*, Wiesbaden, 1969.

[Aiton 1985] Aiton, E.J. *Leibniz : a biography* (Bristol : Hilger, 1985.)

[Bachmacova 1960] Bachmacova, Isabella "Le théorème de l'algèbre et la construction des corps algébriques", *Archives internationales d'histoire des sciences,* 13(1960), pp. 211-222.

[Boyer 1968] Boyer, C. B. *A history of mathematics.* Princeton, NJ: Princeton Univ. Press. (All references are to the paperback edition.) 1985.

[Couturat 1901] Couturat, Louis *La logique de Leibniz : d'après des documents inédits* Paris, 1901. (Hildesheim, Olms, 1985)(rep.).

[D'Alembert 1746] D'Alembert, Jean le Rond "Recherches sur le calcul intégral", *Mémoires de l'académie de Berlin* 1746(1748), pp.182-224.

[D'Alembert 1769] D'Alembert, Jean le Rond "Recherches sur le calcul intégral", *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris* 1769(1772), pp.73-146.

[Euler *Opera*] *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Berlin-Göttingen-Leibzig-Heidelberg, (1911-)

[Euler 1751] Euler, Leonhard "Recherches sur les racines imaginaires des équations", *Mémoire de l'académie de Berlin* 1749(1751), pp.222-288. (ただし引用は [Euler *Opera*] (1), vol. 6, pp. 78-150.)

[Euler En-1905] Eneström, G. "Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johan I Bernoulli", *Bibliotheca*

Mathematica, (3)6(1905), pp.16-87.

[Euler Fuss] *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du $XVIII^e$ siècle*, 2 vols., P. H. Fuss ed., Petersbourg, 1843.

[Euler *Opera Post.*], *Leonhardi Euleri Opera potuma mathematica et physica*, 2 vols. P. H. and N. Fuss ed., Petersbourg, 1862.

[Fine and Rosenberger 1997] Fine, Benjamin : Rosenberger, Gerhard *The fundamental theorem of algebra* (New York : Springer, 1997.)

[Gauss 1799] Gauss, Carl Friedrich "Demonstratio nova theoremis omnen functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse", Helmstadt 1799; [Gauss *Werke*], vol. 3, pp. 1-31.

[Gauss 1815] Gauss, Carl Friedrich "Demonstratio nova altera theoremis omnen functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse", 1815; [Gauss *Werke*], vol. 3, pp. 31-56.

[Gauss 1816] Gauss, Carl Friedrich "Theorematis de resolubilitate functionum algebraicam integrarum in factores reales demonstratio tertia. Supplementum commentationis praecedentis', 1816; [Gauss *Werke*], vol. 3, pp. 57-64.

[Gauss 1850] Gauss, Carl Friedrich "Beitraege zur Theorie der algebraischen Gleichungen" *Abhandlungen der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen* vol. 4, pp. 3-15, Göttingen, 1850.

[Gauss *Werke*] *Carl Friedrich Gauss Werke*, 12 vols., Leibzig-Berlin (1863-1933).

[Gilain 1991] Gilain, Christian "Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral", *Archive for History of Exact Sciences* 42(1991), pp. 91-136.

[Grosholz 1992] Grosholz, Emily "Was Leibniz mathematical revolutionary?", in *Revolutions in Methematics*(ed. by D. Gillies) 1992. pp. 117-133.

[Hairer 1996] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by its history (Undergraduate texts in mathematics* in Readings in mathematics) (New York : Springer-Verlag, 1996.

[Hofmann 1948] Hofmann, J. E. *Leibniz' mathematische Studien in Paris.* Berlin, 1948.

[Hofmann 1949] Hofmann, J. E. *Die Entwicklungsgeschite der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris.* München, 1949.

[Hofmann 1974] Hofmann, J. E. *Leibniz in Paris 1672-1676- his growth to mathematical maturity.* Cambridge, 1974.

[Houzel 1989] Houzel, Christian "D'Alembert et le théorème fondamental de l'algèbre", dans *Jean d'Alembert, savant et philosophe: portrait à plusieurs voix*, pp. 351-360, Paris, Editions des archives contemporaines, 1989.

[Jenni 1983] Jenni, Marcel etc. *Leonhard Euler, 1707-1783 : Beitrage zu Leben und Werk* (Basel : Birkhauser, 1983.)

[Joh. Bernoulli 1702] Bernoulli, Johan "Solution d'un problème concernant le calcul intégral", *MARS*, 1702. pp.289-297 ; [Joh. Bernoulli *Opera*] de Johan Bernoulli,vol.1, pp.393-400.

[Joh. Bernoulli *Opera*] Bernoulli, Johan *Opera ominia*, 4 vols., Lausanne et Genève, 1742.

[Katz 1998] Katz, Victor J. *A History of Mathematics: an Introduction*, 2nd ed. (Massachusetts: Addison-Wesley Longman, 1998)

[Kopelevič 1983] "Euler und die Petersburger Akademie der Wissenschaften" : [Jenni 1983] pp. 373-394.

[Lagrange 1772] Lagrange, Joseph Louis "Sur la forme des racines imaginaires des équations", *Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin* 1772, pp.222-258; [Lagrange *Œuvres*] vol.3, pp. 479-516.

[Leibniz 1702] "Specimen novum analyseo pro scientia infini circa summas et quadraturas", *Acta eruditorum* (mai 1702), pp.210-219. Trad. fr., M.Parmentier dans *Leibniz: La naissance du calcul différentiel*, (Paris : Vrin 1989.) pp. 387-401.

[Leibniz 1703] Leibniz, G.W., "Jac. Bernoulli an Leibniz", [LMG] vol. 3-1, pp. 71-73: 英訳と解説は [Child 1920], pp. 11-21.

[Mahnke 1912] Mahnke, D. "Leibniz auf der Suche nach einer allgemeine Primzahlgleichung" [*BM*] dritte folge (13) 1912-1913. pp. 29-61.

[Neubauer 1978] Neubauer, John *Symbolismus und symbolische Logik : die Idee der ars combinatoria in der Entwicklung der modernen Dichtung* (Munchen : W. Fink, 1978.)

[Novy 1973] Novy, Lubos *Origins of modern algebra* (チェコ語からの翻訳: Jaroslav Tauer. etc.) (Leyden : Noordhoff International Publishing, 1973.)

[Petrova 1974] Petrova, Svetlana, "Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre", *Historia mathematica* 1 (1974), pp. 255-261.

[Serfati 2001] Serfati, Michel, "Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz", *Revue d'histoire des sciences* 54/2 annné 2001, pp. 165-221.

[Struik 1967] Struik, Dirk J. *A Concise History of Mathematics* (3rd rev. ed.) (New York : Dover Publications, 1967.)

[Struik 1969] Struik, Dirk J.(ed.) *A source book in mathematics, 1200-1800* (Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1969.)

[オイラー 2001] 高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』(Euler, L.,"Introductio in analysin infinitorum" の初邦訳, 海鳴社, 2001.

[林 2003] 林知宏『ライプニッツー普遍数学の夢ー』コレクション数学史２ 佐々木力編, 東京大学出版会, 2003.

[林 2000] 林知宏「ライプニッツ数学思想の形成」(東京大学大学院総合文化研究科博士論文, 2000 年)

[ライプニッツ 1997] 『ライプニッツ著作集』2『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁 他訳（工作社, 1997 年)

[ライプニッツ 1999] 『ライプニッツ著作集』3『数学論・数学』原亨吉・三浦伸夫・馬場郁 他訳（工作社, 1999 年)